

ТОЧНОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СКОРОСТИ ТЕПЛОВОГО РАСПАДА МЕТАСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В РЕЖИМЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ДИФфуЗИИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Задача о тепловом распаде метастабильного состояния встречается во многих отраслях естественных наук: от химии и физики атомного ядра до электромагнетизма и астрофизики. Особый интерес представляет режим энергетической диффузии (режим малого трения), который менее интенсивно исследован в литературе. Целью данной работы является анализ точности приближенных аналитических формул для скорости распада метастабильного состояния в режиме энергетической диффузии.

Материалы и методы. Численное моделирование теплового распада метастабильного состояния проведено с помощью стохастических дифференциальных уравнений (уравнений Ланжевена).

Результаты. Квазистационарная скорость распада рассчитана как для режима энергетической, так и пространственной диффузии. Скорости распада, полученные при численном моделировании, являются точными в пределах статистических погрешностей. Произведено сравнение приближенных скоростей распада с динамическими (численными) в широком диапазоне фрикционного параметра. Результаты представлены в безразмерном виде, чтобы сделать их полезными для более широкого круга читателей.

Выводы. Оказалось, что в рамках используемой модели (параболический потенциал, отношение высоты барьера к тепловой энергии равно 2,4), можно подобрать такое значение единственного свободного параметра, входящего в приближенную формулу, что отклонение приближенной скорости от точной не превышает 5 %. Полученное значение этого свободного параметра не зависит от величины трения и не противоречит физическому смыслу, который вкладывался в этот параметр его авторами.

Ключевые слова: скорость теплового распада, уравнения Ланжевена, режим энергетической диффузии.

M. V. Chushnyakova, I. I. Gonchar, S. N. Krokhin, O. V. Maliy

ACCURACY OF ANALYTICAL CALCULATION OF THE HEAT DECAY RATE OF METASTABLE STATE IN THE ENERGY DIFFUSION MODE

Abstract.

Background. The problem of the thermal decay of a metastable state appears in many branches of natural sciences: from chemistry and nuclear physics till electromagnetism and astrophysics. The energy diffusion regime (regime of weak friction)

is of the special interest since it is less intensively studied in the literature. The aim of the present research is the analysis of accuracy of approximate analytical formulas for the rate of a metastable state thermal decay in the energy diffusion regime

Materials and methods. The numerical modeling of a metastable state thermal decay is performed by means of the stochastic differential equations (Langevin equations).

Results. The quasistationary decay rate is calculated for the energy diffusion regime as well as for the spatial diffusion regime. The decay rates obtained using the numerical modeling are exact within the statistical errors. These dynamical (numerical) rates are compared with the approximate formulas for the energy diffusion regime in a wide range of friction parameter. All the results are presented in the dimensionless form in order to make them useful for a wider range of readers.

Conclusions. It is found that within the present model (parabolic potential, ratio of the barrier height to thermal energy is equal to 2.4), it is possible to choose such a value of a single free parameter of the approximate formula that the deviation of the approximate rate from the exact one does not exceed 5%. The obtained value of the free parameter does not depend upon the friction strength and does not contradict to the physical sense of the parameter intended by authors.

Keywords: thermal decay rate; Langevin equations; energy diffusion regime

Введение

Проблема теплового распада метастабильного состояния возникает во многих естественных науках: химия [1–4], термодинамика и статистическая физика [5–8], биофизика [9], ядерная физика [1, 10], электричество и магнетизм [11–13], физика твердого тела [4], астрофизика [5] и др. Главной характеристикой этого процесса является скорость распада. В литературе она в основном анализировалась для области большого трения [14, 15], а области малого трения (так называемый режим энергетической диффузии [3, 4]) уделялось мало внимания, хотя такой анализ востребован [13, 16].

Приближенные аналитические формулы скорости этого распада при наличии диссипации получены в знаменитой статье Крамерса [1]. Одна из этих формул, применимая при экстремально малом трении, была позже обобщена в работе [13] так, чтобы обеспечить плавный переход к формуле для умеренного трения. Для этого авторам работы [13] пришлось ввести в обобщенную формулу подгоночный параметр. В работе [13] представлены некоторые численные расчеты, из которых следует, что обобщенная формула дает результат, качественно согласующийся с численным. Однако остается неясным, зависит подгоночный параметр от интенсивности трения или нет. Решению этого вопроса и посвящена данная работа.

1. Модель

При экстремально малом трении броуновская частица (БЧ), движущаяся в потенциальной яме, за один период теряет ничтожную долю своей энергии. Такое движение оказывается удобным описывать с помощью диффузионного уравнения, в котором плотность вероятности зависит от времени и энергии БЧ. Это уравнение приведено, например, в [1, 3]. Решая его, Крамерс в [1] получил следующую приближенную формулу:

$$R_{KL} = \gamma \omega \exp\left(-\frac{U_b}{\theta}\right). \quad (1)$$

Здесь θ – средняя тепловая энергия, приходящаяся в состоянии равновесия на одну колебательную степень свободы; U_b – высота потенциального барьера, отделяющего метастабильное состояние от области инфинитного движения; ω – циклическая частота колебаний БЧ вблизи дна потенциальной ямы.

Безразмерный параметр γ в формуле (1) имеет вид

$$\gamma = \frac{I_b \eta}{\theta m}. \quad (2)$$

Множитель I_b представляет собой классическое действие для движения БЧ без диссипации с энергией U_b . В нашем случае $I_b = 1,068 U_b / \omega$; η – фрикционный параметр; m – инерционный параметр. Формула (1) справедлива при $\gamma < 1$. В работе [13] предложена модификация формулы (2), которая позволяет частично сгладить переход от режима энергетической диффузии к режиму пространственной диффузии. Модифицированная скорость R_{KLB} имеет вид

$$R_{KLB} = \frac{\delta - 1}{\delta + 1} R_{KL}, \quad (3)$$

здесь

$$\delta = \left(1 + \frac{2\alpha}{\pi\gamma} \right)^{1/2}; \quad (4)$$

α – подгоночный параметр, который должен быть несколько больше единицы [13]. Дело в том, что он характеризует отклонение функции распределения в фазовом пространстве на барьере от ее среднего значения вдоль траектории с постоянной энергией (детали можно найти в [13]).

Для среднего трения, когда флуктуации и диссипация играют соизмеримую роль (режим пространственной диффузии [3, 4]), Крамерс получил в [1] другую формулу:

$$R_{KM} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\omega^2 + \frac{\eta^2}{4m^2} \right)^{1/2} - \frac{\eta}{2m} \right\} \exp \left(-\frac{U_b}{\theta} \right). \quad (5)$$

Аналитические приближенные скорости распада (3) и (5) мы будем сравнивать с динамическими, которые в пределах статистических погрешностей являются точными. Численное моделирование производилось с помощью уравнений Ланжевена. Поскольку в [1, 13] для режима энергетической диффузии представлены только одномерные формулы, мы также ограничиваемся одномерным моделированием. Движение БЧ описывается безразмерной координатой q и сопряженным импульсом p . В дискретном виде уравнения Ланжевена имеют вид

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} \left(1 - \eta m^{-1} \tau \right) + K^{(n)} \tau + gb^{(n)} \sqrt{\tau}, \quad (6)$$

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + \left(p^{(n)} + p^{(n+1)} \right) \tau / (2m). \quad (7)$$

Верхний индекс соответствует двум последовательным моментам времени, которые разделены временным шагом моделирования τ . Случайные числа b , входящие в случайную силу, имеют гауссово распределение с нулевым средним и дисперсией 2. В формуле (6) $K = -dU/dq$ представляет собой консервативную силу; $g = \sqrt{\theta\eta}$ – амплитуда случайной силы.

Потенциальная энергия $U(q)$ параметризована двумя параболами одинаковой жесткости C , гладко сшитыми при $q = q_m$:

$$U(q) = \begin{cases} C(q - q_c)^2 / 2 & \text{при } q < q_m; \\ U_b - C(q - q_b)^2 / 2 & \text{при } q > q_m. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь индекс c относится к дну потенциальной ямы, а индекс b соответствует вершине барьера ($q_b = 1,6$). В начальный момент времени БЧ находится в точке с координатой $q_c = 1,0$ и имеет нулевой импульс.

Результатом моделирования является последовательность из N_{tot} траекторий, моделирование каждой из которых ограничено моментом времени t_D . Некоторые траектории достигают поглощающей границы $q_a = 2,0$ за время, меньшее чем t_D . Зависящая от времени скорость распада $R_{at}(t)$ вычисляется следующим образом:

$$R_{at}(t) = \frac{1}{N_{tot} - N_{at}} \frac{\Delta N_{at}}{\Delta t}. \quad (9)$$

Здесь N_{at} – число БЧ, которые достигли точки q_a до момента времени t , ΔN_{at} – число БЧ, которые пришли к точке q_a в течение интервала времени Δt . Примеры зависимости $R_{at}(t)$ для промежуточного и большого трения можно найти во многих статьях [10, 14, 17–20]. В нашем случае зависимость $R_{at}(t)$ имеет схожий вид: после некоторого времени релаксации скорость стабилизируется, хотя флуктуации, разумеется, присутствуют. Чтобы найти квазистационарную скорость распада R_D , мы используем несколько бинов с конца массива $R_{at}(t)$ и производим усреднение по этим бинам. Этот алгоритм и его погрешности детально описаны в [20, 21].

2. Результаты и обсуждение

Типичные траектории броуновских частиц, полученные в результате расчетов, приведены на рис. 1. Так как мы обсуждаем общефизическую проблему, все результаты представлены в безразмерном виде; это позволяет сделать их полезными для более широкого круга читателей. Отношение U_b / θ на этом рисунке немного отличается от того, с которым получены количественные результаты. Однако на понимание различий в режимах, которые иллюстрируются выбранными траекториями, это никак не влияет.

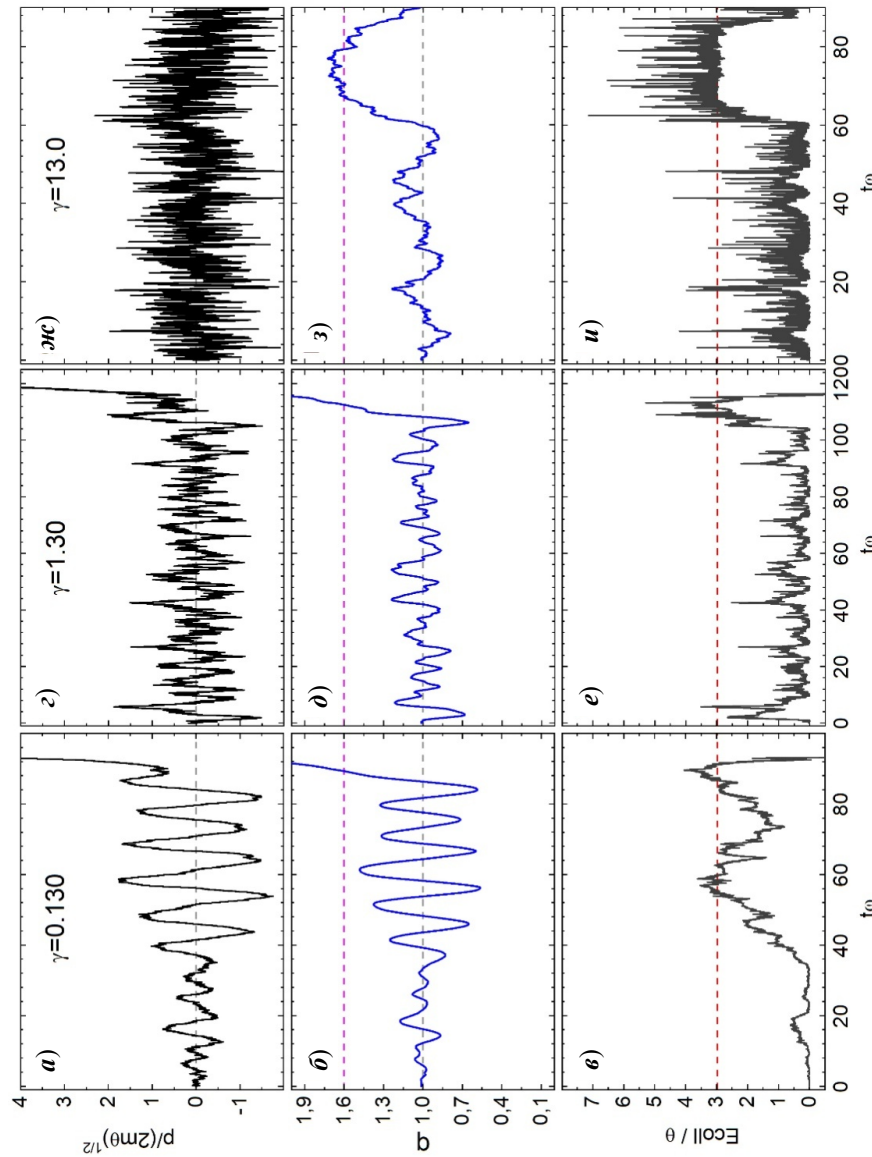


Рис. 1. Как функции времени показаны: импульс (*a, г, ж*), координата (*б, д, з*) и энергия (*в, е, и*) типичной БЧ в трех режимах: энергетической диффузии (левая колонка), диффузии в фазовом пространстве (средняя колонка) и в режиме пространственной диффузии (правая колонка) $U_0/\theta = 3,0$

В верхнем ряду рис. 1 показана зависимость импульса от времени, в среднем – координаты, а в нижнем – энергии БЧ:

$$E_{coll} = E_{kin} + U(q). \quad (10)$$

Колонки различаются значениями безразмерного параметра γ , который пропорционален фрикционному параметру (см. формулу (2)). В левой колонке этот параметр очень мал и соответствует режиму энергетической диффузии. Мы видим, что координата и импульс при движении БЧ в потенциальной яме меняются почти периодически, и периоды их изменения одинаковы. Разумеется, стохастическая составляющая здесь присутствует, но выражена она только в том, что увеличивается амплитуда изменения импульса и координаты. А вот в энергии БЧ (рис. 1, **б**) флуктуации выражены гораздо ярче, что и отражено в названии этого режима. Обратим теперь внимание на штриховую линию на рис. 1, **б, д, з** при значении $q = 1,6$. Это – координата вершины барьера, который надо преодолеть БЧ, чтобы покинуть метастабильное состояние.

На рис. 1, **б, е, и** штриховая линия отвечает высоте барьера. При описании распада метастабильного состояния с помощью уравнения диффузии по энергии (формула (14) в работе [1]) считается, что распад произошел, если энергия частицы стала больше, чем высота барьера. Рисунки 1, **б, в** показывают, что это не совсем так: энергия частицы превзошла высоту барьера при $t\omega = 50-55$, но распад не произошел, потому что частица в это время находилась далеко от барьера. На то, что распад произошел, указывают резко возрастающие импульс и координата при $t\omega = 90$. Разумеется, при этом E_{coll} превысила U_b .

Перейдем теперь к анализу траектории, соответствующей среднему трению (рис. 1, **з, д, е**). Теперь периодическое изменение импульса и координаты сменилось ярко выраженным флуктуационным изменением, причем временные масштабы флуктуаций координаты, импульса и энергии вполне соизмеримы. Эволюция траектории в данном случае мало похожа и на энергетическую диффузию (левая колонка), и на пространственную диффузию (правая колонка). Мы считаем, что целесообразно выделить такую эволюцию в отдельный режим: режим диффузии в фазовом пространстве. Этот режим требует для своего описания уравнений Ланжевена для координаты и импульса или уравнения Фоккера – Планка для функции распределения этих переменных.

Наконец, на рис. 1, **ж, з, и** показана траектория, соответствующая большому трению. Это значит, что распределение импульса релаксирует к равновесному очень быстро, флуктуации импульса с изменением знака происходят очень часто, а координата эволюционирует намного медленнее. Математически такая эволюция может быть адекватно описана с помощью редуцированного уравнения Ланжевена для координаты или уравнения Смолуховского для функции распределения по координате. Это режим пространственной диффузии, который называют еще режимом сверхзатухания.

На рис. 2 как функции времени показаны скорости распада, отвечающие тем же трем значениям фрикционного параметра, что и траектории на рис. 1. Все три скорости похожи, и по их внешнему виду мы не можем сказать, в каком режиме находится система. Во всех трех случаях квазистацио-

нарная скорость определена с относительной погрешностью, не превышающей 1,0 %.

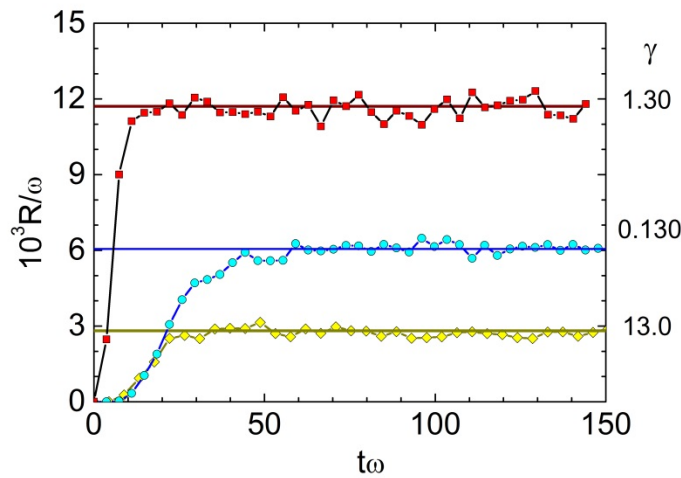


Рис. 2. Скорости распада как функции времени для режимов диффузии в фазовом пространстве ($\gamma = 1,30$), энергетической диффузии ($\gamma = 0,130$) и пространственной диффузии ($\gamma = 13,0$). Горизонтальными линиями показаны квазистационарные значения $U_b / \theta = 2,4$

Рисунок 3 иллюстрирует наш основной результат. На верхней панели показаны квазистационарные скорости распада R_D (сплошные кружки). Их значения покрывают два порядка величины. Эти скорости сравниваются с приближенными аналитическими, полученными по формуле (3) с $\alpha = 1,6$ (толстая линия, проходящая через значки в левой части рисунка) и по формуле (5) (тонкая линия, проходящая через значки в правой части рисунка). Заметим, что наши расчеты проведены в очень широком диапазоне значений фрикционного параметра: он изменяется более чем на 4 порядка. Как мы уже упоминали, квазистационарные скорости распада при больших значениях трения изучены достаточно подробно, поэтому правая часть рисунка нас интересует в меньшей степени. Основное внимание в нашей работе уделяется режиму энергетической диффузии.

Оценить количественно согласие аналитических формул с численными расчетами на рис. 3,а довольно трудно из-за того, что скорость распада меняется в десятки раз. Для такой оценки лучше подходит относительная разность скоростей, определяемая формулой

$$\xi_{KD} = R_K / R_D - 1. \quad (11)$$

Здесь в роли R_K выступает либо R_{KM} , либо R_{KLB} (каждая в своей области применимости). Значения ξ_{KLB} , полученные с использованием пяти значений параметра α , показаны в левой части рис. 3,б. Значениям ξ_{KMD} отвечают звездочки в правой части рис. 3,б. Видно, что согласие R_{KM} с R_D очень хорошее: для $\gamma > 1$ абсолютные значения ξ_{KMD} не превышают 4 %.

Это не тривиально, так как в наших расчетах показатель экспоненты $U_b\theta^{-1} = 2,4$, что могло бы приводить к погрешности, равной $\exp(-2,4) = 9\%$. В работе [14] показано, что хорошее согласие R_{KM} с R_D при большом трении – случайность, присущая только данному потенциалу.

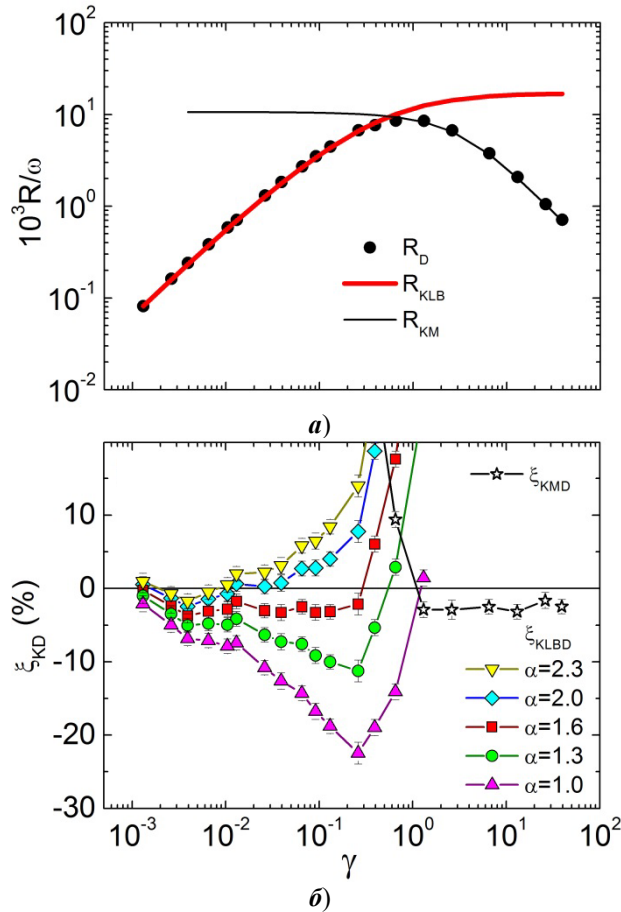


Рис. 3. Скорости распада (а) и относительные разности скоростей распада (б) в зависимости от параметра γ . Левая, средняя и правая части рисунка соответствуют режимам энергетической диффузии, диффузии в фазовом пространстве и пространственной диффузии $U_b / \theta = 2,4$

Обсудим теперь согласие формулы (3) с результатами динамических расчетов. В ней имеется свободный параметр α , значение которого не определено. Из формул (2)–(4) видно, что с уменьшением трения роль этого параметра уменьшается, и R_{KLB} стремится к R_{KL} . В левой части рис. 3, б все пять кривых действительно сходятся и приближаются к нулевому значению, так что в этом смысле приближенные формулы (1) и (3) согласуются с динамическими расчетами. Это тоже нетривиальный результат, ведь базовая формула Крамерса (1) выведена из уравнения энергетической диффузии, которое является приближенным вариантом уравнения Фоккера – Планка, а наш расчет

выполнен с помощью уравнений Ланжевена, которые эквивалентны уравнению Фоккера – Планка.

Однако в средней части рис. 3,б кривые ξ_{KLBD} , отвечающие разным значениям параметра α , сильно расходятся. Наилучшим образом согласуется с нулем кривая с квадратами, т.е. $\alpha = 1,6$ следует признать наилучшим. Таким образом, предположение о том, что $\alpha > 1$, сделанное в [13], в нашем расчете оправдывается.

В целом оказывается, что если при $\gamma > 1$ использовать формулу Крамера (5), а при $\gamma < 0,3$ – формулу (3) с $\alpha = 1,6$, то согласие с точной динамической квазистационарной скоростью оказывается не хуже 4 %. В промежуточном случае лучше прибегнуть к численному расчету. Однако, если нет жестких требований к точности и погрешность в 15 % является приемлемой, то можно использовать аналитические формулы во всем диапазоне параметра γ : при $\gamma < 0,55$ формулу (3) с $\alpha = 1,6$; при больших значениях – формулу (5).

Заключение

Мы провели численное моделирование процесса теплового распада метастабильного состояния с помощью стохастических дифференциальных уравнений (уравнений Ланжевена). Получена квазистационарная скорость распада для широкого диапазона фрикционного параметра, покрывающего как режим энергетической, так и пространственной диффузии. Скорости распада, полученные при численном моделировании, являются точными в пределах статистических погрешностей. Мы использовали эти численные скорости для установления точности приближенных формул, полученных для режима энергетической диффузии в работах [1, 13]. Оказалось, что в рамках данной модели (параболический потенциал, отношение высоты барьера к тепловой энергии 2,4), можно подобрать такое значение свободного параметра α , что отклонение приближенной скорости от точной не превышает 4 %. Полученное значение $\alpha = 1,6$ не зависит от величины фрикционного параметра и не противоречит физическому смыслу, который вкладывается в этот параметр в работе [13], где он был введен. Чтобы ответить на вопросы, изменится ли значение α при изменении отношения U_b / θ и как повлияет на согласие скоростей изменение формы потенциала, необходимы дополнительные расчеты, которые требуют больших затрат компьютерного времени и сейчас проводятся.

Библиографический список

1. **Kramers, H. A.** Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions / H. A. Kramers // *Physica*. – 1940. – Vol. 7, № 4. – P. 284–304.
2. **Weiss, G. H.** Overview of theoretical models for reaction rates / G. H. Weiss // *Journal of Statistical Physics*. – 1986 – Vol. 42, № 1. – P. 3–36.
3. **Hänggi, P.** Reaction-rate theory: fifty years after Kramers / P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec // *Review of Modern Physics*. – 1990. – Vol. 62, № 2. – P. 251–341.
4. *New Trends in Kramers' Reaction Rate Theory* / P. Talkner, P. Hänggi (eds.). – Berlin : Springer, 2012. – 251 p.
5. **Chandrasekhar, S.** Stochastic Problems in Physics and Astronomy / S. Chandrasekhar // *Review of Modern Physics*. – 1943. – Vol. 15, № 1. – P. 1–89.

6. **Pontryagin, L.** On the statistical treatment of dynamical systems, Noise in Nonlinear Dynamical Systems Volume 1. Theory of Continuous Fokker-Planck Systems / L. Pontryagin, A. Andronov, A. Vitt. – Cambridge : Cambridge University Press, 2009. – 356 p.
7. **Challis, K. J.** Numerical study of the tight-binding approach to overdamped Brownian motion on a tilted periodic potential / K. J. Challis // *Physical Review E*. – 2016. – Vol. 94, № 6. – P. 062123
8. **Sharma, A.** Escape rate of active particles in the effective equilibrium approach / A. Sharma, R. Wittmann, J. M. Brader // *Physical Review E*. – 2017. – Vol. 95, № 1. – P. 012115.
9. **Zhou, H.-X.** Rate theories for biologists / H.-X. Zhou // *Quarterly Reviews of Biophysics*. – 2010. – Vol. 43, № 2. – P. 219–293.
10. **Gontchar, I. I.** Nuclear fission: combining the dynamical Langevin equation with the statistical model / I. I. Gontchar, P. Fröbrich // *Nuclear Physics A*. – 1993. – Vol. 551, № 3. – P. 495–507.
11. **Ezin, A. N.** Kramers problem: Numerical Wiener-Hopf-like model characteristics / A. N. Ezin, A. L. Samgin // *Physical Review E*. – 2010. – Vol. 82, № 5. – P. 056703.
12. Scaling analysis and instantons for thermally assisted tunneling and quantum Monte Carlo simulations / Z. Jiang, V. N. Smelyanskiy, S. Boixo, H. Neven, S. V. Isakov, G. Mazzola, M. Troyer // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 95, № 1. – P. 012322.
13. **Büttiker, M.** Thermal activation in extremely underdamped Josephson-junction circuits / M. Büttiker, E. P. Harris, R. Landauer // *Physical Review B*. – 1983. – Vol. 28, № 3. – P. 1268–1275.
14. Disentangling effects of potential shape in the fission rate of heated nuclei / I. I. Gontchar, M. V. Chushnyakova, N. E. Aktaev, A. L. Litnevsky, E. G. Pavlova // *Physical Review C*. – 2010. – Vol. 82, № 6. – P. 064606.
15. **Eccles, C.** Temperature dependence of nuclear fission time in heavy-ion fusion-fission reactions / C. Eccles, S. Roy, T. H. Gray, A. Zaccane // *Physical Review C*. – 2017. – Vol. 96, № 5. – P. 054611.
16. **Chushnyakova, M. V.** Thermal decay of a metastable state: Influence of rescattering on the quasistationary dynamical rate / M. V. Chushnyakova, I. I. Gontchar // *Physical Review E*. – 2018. – Vol. 97, № 3. – P. 032107.
17. **Karpov, A. V.** Consistent application of the finite-range liquid-drop model to Langevin fission dynamics of hot rotating nuclei / A. V. Karpov, P. N. Nadtochy, E. G. Ryabov, G. D. Adeev // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. – 2003. – Vol. 29, № 10. – P. 2365–2380.
18. **Nadtochy, P. N.** Fission rate in multi-dimensional Langevin calculations / P. N. Nadtochy, A. Kelić, K.-H. Schmidt // *Physical Review C*. – 2007. – Vol. 75, № 6. – P. 064614.
19. **Pavlova, E. G.** Modified Kramers formulas for the decay rate in agreement with dynamical modeling / E. G. Pavlova, N. E. Aktaev, I. I. Gontchar // *Physica A*. – 2012. – Vol. 391, № 23. – P. 6084–6100.
20. **Gontchar, I. I.** Precision computation of the fission rate of the excited atomic nuclei / I. I. Gontchar, S. N. Krokhin // *Herald of Omsk University*. – 2012. – Vol. 4. – P. 84–87.
21. **Gontchar, I. I.** Thermal decay rate of a metastable state with two degrees of freedom: Dynamical modelling versus approximate analytical formula / I. I. Gontchar, M. V. Chushnyakova // *Pramana – Journal of Physics*. – 2017. – Vol. 88, № 6. – P. 90.

References

1. Kramers H. A. *Physica*. 1940, vol. 7, no. 4, pp. 284–304.
2. Weiss G. H. *Journal of Statistical Physics*. 1986, vol. 42, no. 1, pp. 3–36.

3. Hänggi P., Talkner P., Borkovec M. *Review of Modern Physics*. 1990, vol. 62, no. 2, pp. 251–341.
4. *New Trends in Kramers' Reaction Rate Theory*. P. Talkner, P. Hänggi (eds.). Berlin: Springer, 2012, 251 p.
5. Chandrasekhar S. *Review of Modern Physics*. 1943, vol. 15, no. 1, pp. 1–89.
6. Pontryagin L., Andronov A., Vitt A. *On the statistical treatment of dynamical systems, Noise in Nonlinear Dynamical Systems Volume 1. Theory of Continuous Fokker-Planck Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 356 p.
7. Challis K. J. *Physical Review E*. 2016, vol. 94, no. 6, p. 062123
8. Sharma A., Wittmann R., Brader J. M. *Physical Review E*. 2017, vol. 95, no. 1, p. 012115.
9. Zhou H.-X. *Quarterly Reviews of Biophysics*. 2010, vol. 43, no. 2, pp. 219–293.
10. Gontchar I. I., Fröbrich P. *Nuclear Physics A*. 1993, vol. 551, no. 3, pp. 495–507.
11. Ezin A. N., Samgin A. L. *Physical Review E*. 2010, vol. 82, no. 5, p. 056703.
12. Jiang Z., Smelyanskiy V. N., Boixo S., Neven H., Isakov S. V., Mazzola G., Troyer M. *Physical Review A*. 2017, vol. 95, no. 1, p. 012322.
13. Büttiker M., Harris E. P., Landauer R. *Physical Review B*. 1983, vol. 28, no. 3, pp. 1268–1275.
14. Gontchar I. I., Chushnyakova M. V., Aktaev N. E., Litnevsky A. L., Pavlova E. G. *Physical Review C*. 2010, vol. 82, no. 6, p. 064606.
15. Eccles C., Roy S., Gray T. H., Zaccane A. *Physical Review C*. 2017, vol. 96, no. 5, p. 054611.
16. Chushnyakova M. V., Gontchar I. I. *Physical Review E*. 2018, vol. 97, no. 3, p. 032107.
17. Karpov A. V., Nadochy P. N., Ryabov E. G., Adeev G. D. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. 2003, vol. 29, no. 10, pp. 2365–2380.
18. Nadochy P. N., Kelić A., Schmidt K.-H. *Physical Review C*. 2007, vol. 75, no. 6, pp. 064614.
19. Pavlova E. G., Aktaev N. E., Gontchar I. I. *Physica A*. 2012, vol. 391, no. 23, pp. 6084–6100.
20. Gontchar I. I., Krokhn S. N. *Herald of Omsk University*. 2012, vol. 4, pp. 84–87.
21. Gontchar I. I., Chushnyakova M. V. *Pramana – Journal of Physics*. 2017, vol. 88, no. 6, p. 90.

Чушнякава Мария Владимировна

кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель, кафедра физики,
Омский государственный технический
университет (Россия, г. Омск,
пр. Мира, 11)

E-mail: maria.chushnyakova@gmail.com

Chushnyakova Mariya Vladimirovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, senior lecturer, sub-department
of physics, Omsk State Technical
University (11, Mira avenue,
Omsk, Russia)

Гончар Игорь Иванович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра физики и химии,
Омский государственный университет
путей сообщения (Россия, г. Омск,
пр. Маркса, 35)

E-mail: vigichar@hotmail.com

Gonchar Igor' Ivanovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of physics and chemistry, Omsk
State Transport University
(35, Marksa avenue, Omsk, Russia)

Крохин Сергей Николаевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой физики
и химии, Омский государственный
университет путей сообщения
(Россия, г. Омск, пр. Маркса, 35)

E-mail: krokhinsn@mail.ru

Krokhin Sergey Nikolaevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, head of the
sub-department of physics and chemistry,
Omsk State Transport University
(35, Marksa avenue, Omsk, Russia)

Малий Ольга Владимировна

инженер, кафедра физики, Омский
государственный технический
университет (Россия, г. Омск,
пр. Мира, 11)

E-mail: malij_olga@mail.ru com

Maliy Ol'ga Vladimirovna

Engineer, sub-department of physics,
Omsk State Technical University
(11, Mira avenue, Omsk, Russia)

Образец цитирования:

Чушнякова, М. В. Точность аналитического расчета скорости теплового распада метастабильного состояния в режиме энергетической диффузии / М. В. Чушнякова, И. И. Гончар, С. Н. Крохин, О. В. Малий // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 3 (51). – С. 131–142. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-3-9.